

Cálculo

MATEMÁTICA PARA TODOS



TEORIA DOS JOGOS:
blefar não é opção, mas obrigação



Você nunca viu um quadrado na vida!

3 REGRAS SIMPLES PARA ENRIQUECER

Depois de estudar as três (bem explicadas por especialistas em finanças e economia), o leitor ganha a capacidade de deixar sua situação financeira mais próspera, e de lambuja vê como a matemática subjacente a cada regra é simples e atraente



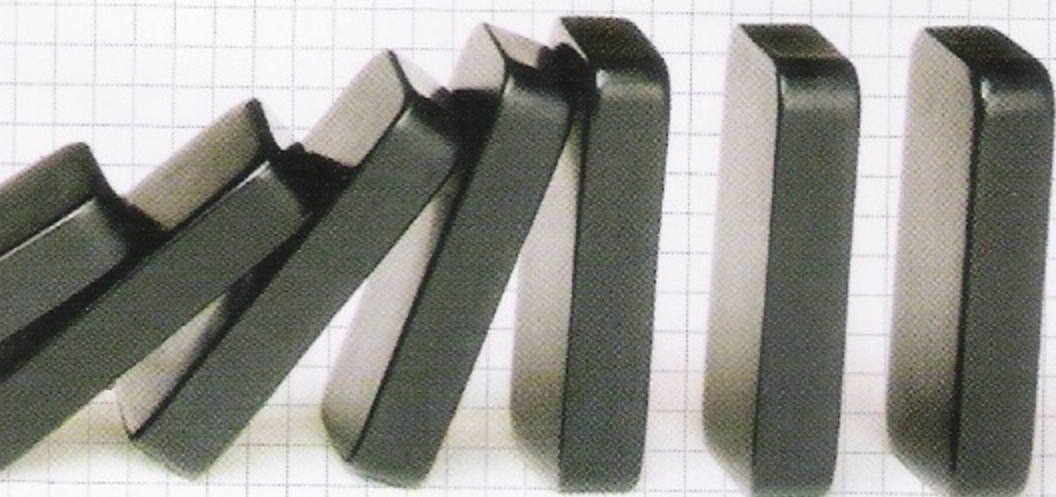
ENTREVISTA

Cassius Almada

Não use o exemplo do táxi para ilustrar as funções afins: ele é complicado



SÉRIE ESPECIAL



CÁLCULO TORNADO FÁCIL: Tanto na matemática quanto na ciência, você precisa usar a técnica de achar a derivada de uma derivada

EDIÇÃO 34 - ANO 3 - NOVEMBRO/2013

ISSN 2179-1384



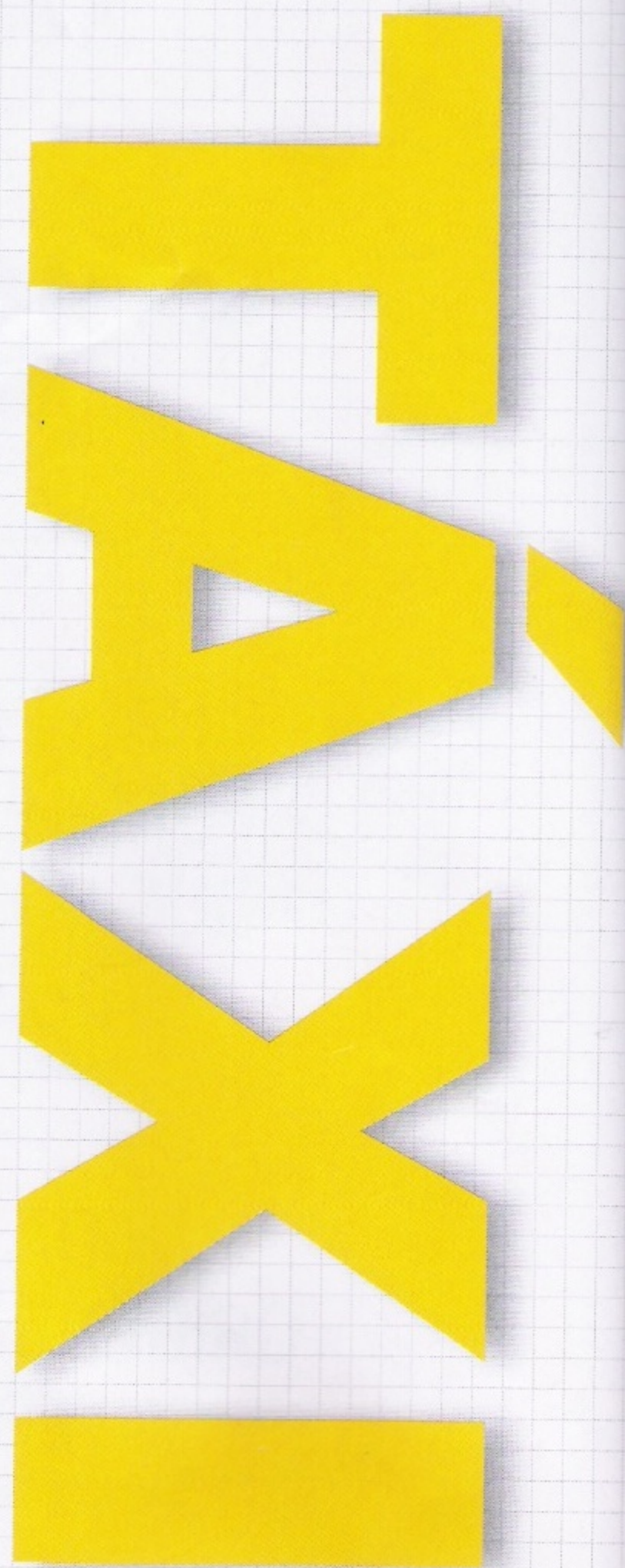
0 0 0 3 4



R\$ 10,00

9 772179 138006

Abaixo aquele famigerado



Eis um problema clássico: um taxista cobra R\$ 4,10 pela bandeirada e R\$ 2,50 pelo quilômetro rodado. Quanto custaria uma viagem de 3.650 metros? CASSIUS ALMADA, professor de matemática no ensino fundamental 2 e no médio do Rio de Janeiro (RJ), acha que ninguém deveria mencionar o problema do táxi como exemplo de função polinomial do primeiro grau — pelo menos não sem antes explicar várias ressalvas ao exemplo



Será que existe algum brasileiro que nunca resolveu o problema do táxi? É um problema do tipo “João pegou um táxi para uma viagem de 32 quilômetros [...] Quanto João pagou pela corrida?”, e é muitíssimo usado para ilustrar os usos das funções polinomiais de primeiro grau (chamadas no Brasil de funções afins). Bem, Cassius não usa o problema do táxi com seus alunos: cismou com esse problema. “Se você parar para pensar”, diz Cassius, “não dá para usar o problema do táxi para ilustrar as funções afins. Acho até que o problema do táxi faz parte de um problema maior e recente: o de contextualizar o incontextualizável.”

“EU ADORO MATEMÁTICA, MAS ESSA MANIA DE CONTEXTUALIZAR, DE ACHAR UM EXEMPLO REAL, ÀS VEZES VAI LONGE DEMAIS. VI UMA VEZ UM EXERCÍCIO QUE FALAVA DE UMA MOSCA VIAJANDO NA VELOCIDADE DO SOM!”



Quando concluiu o curso de licenciatura em matemática, em 2011, Cassius escreveu um trabalho de conclusão de curso sobre pesquisa operacional, no qual praticou a arte de converter um problema do mundo real num modelo matemático — e escolheu um problema de transporte. “Desde essa ocasião, passei a pensar: como alguém poderia modelar corretamente o problema do táxi? Uma das ideias essenciais da modelagem matemática é: antes de construir o modelo, saia a campo, vá ver versões reais do problema que pretende modelar. Percebi que o problema do táxi é mais complicado do que parece à primeira vista.”

Cassius quer dizer o seguinte: a função do professor de matemática é ensinar seus alunos a pensar com precisão, de modo que, por meio do pensamento treinado com matemática, conheçam melhor o mundo em que vivem e

possam quiçá transformá-lo. Usar um exemplo que, olhando bem, é inadequado para ilustrar o tópico ensinado não ajuda em nada.

Você usa o exemplo do táxi com seus alunos?

Não uso. Procuo dizer que o exemplo do táxi não é perfeitamente adequado para ilustrar uma função de primeiro grau, mas sou obrigado a tratar um pouco desse exemplo da forma convencional — porque, caso eu não dê uma pincelada nesse exemplo, corro o risco de deixá-los confusos, visto que ele aparece em tudo quanto é livro e pode aparecer no vestibular.

Só que falo sobre isso tudo de passagem, sem entrar em muitos detalhes. Se o professor cria uma polêmica muito grande em sala de aula, a classe dispersa, e isso é ruim para todo mundo. Agora, conforme a classe, dá para conversar melhor sobre o exemplo do táxi

com os alunos mais avançados, porque eles pegam rápido a ideia de função chã. Mas só posso levar uma conversa dessas depois da aula.

E que exemplos usa?

Prefiro os exemplos com dinheiro. Eu sei que eles também não são adequados, pois as quantias pulam de centavo em centavo, mas pelos menos não pulam de quilômetro em quilômetro... Gosto de exemplos como o do vendedor, que tem um salário fixo e ganha uma porcentagem sobre as vendas. Gosto também do exemplo do posto de gasolina, que é bem linear. Um problema assim tem uma vantagem extra: a bomba do posto faz arredondamentos, e, num posto que vende 1 milhão de litros por ano, faz diferença se o dono do posto deveria vender a gasolina com cinco casas decimais, mas a vende só com duas. É um tema interessante.

O dono do posto deveria vender a gasolina a R\$ 2,43687, mas a vende a 2,44. O estudante chama a quantidade anual de gasolina vendida de Q , o maior preço de b e o menor preço de a ; daí o ganho anual com o arredondamento é $Q(b - a) = 1.000.000(2,44 - 2,43687) = 3.130$ reais.

Agora, acho que não conheço nenhum exemplo real que possa ser usado como o exemplo perfeito de função afim. Não fica natural, por exemplo, usar a idade de uma pessoa como exemplo; acho estranho falar de anos, meses, dias, horas, minutos, segundos, décimos de segundo, etc. Então, ao escolher um exemplo mais natural, a gente usa a função afim como base, mas faz uma série de adaptações: restringe o domínio (e o contradomínio), faz umas simplificações, etc. Mas o resultado já não é mais uma função afim.

Se modificou a função, já não pode mais chamá-la de função afim?

Eu acho que não, isto é, acho que o mais apropriado é dar outro nome para a função. Olha, eu sei que, para montar um modelo matemático, temos de fazer escolhas, simplificações; temos de ignorar algumas coisas. Eu sei disso. Mas o meu ponto é: a função afim é uma função de \mathbb{R} em \mathbb{R} dada pela fórmula $y = f(x) = ax + b$, com a e b reais e a diferente de 0. Se faço modificações no domínio, já não é mais uma função polinomial do primeiro grau, mas outro objeto matemático. O que quero dizer é que não podemos definir tais funções apenas com base no expoente da variável independente

x — temos de examinar o domínio também. Eu não gostaria de chamar uma função do tipo escada, com domínio restrito, de “função polinomial do primeiro grau” ou “função afim”, pois acho que, ao fazer isso, passaria aos alunos uma mensagem errada.

Talvez eu esteja querendo dizer o seguinte: tenho uma relação de amor e ódio com a matemática. Eu adoro matemática, mas essa mania de contextualizar, de achar um exemplo real, às vezes vai longe demais. Vi uma vez um exercício que falava de uma mosca viajando na velocidade do som! E daí, nesse afã de contextualizar, dizem que o exemplo do táxi é um ótimo exemplo de função polinomial do primeiro grau — quando nem é o melhor exemplo.

Como costuma dar aulas?

Acho que o aluno vem do fundamental 1 muito imaturo na matemática. Como o fundamental 2 é importantíssimo na carreira matemática de qualquer pessoa, devo confessar que eu pego pesado com meus alunos. Por exemplo, sou muito exigente com a aritmética.

Fico insatisfeito quando um aluno calcula $32 + 55$ [que é 87] e depois peço para que calcule $3.200 + 5.500$, e ele vai e faz a conta tudo de novo! Eu quero que ele perceba que deve pegar o resultado anterior e multiplicá-lo por 100. Fico insatisfeito quando mostro um número grande dentro do símbolo de raiz quadrada, um número terminado em 3, pergunto se o número tem raiz inteira e o aluno quer fazer a conta. Ele tem de saber que um número terminado em 3, não importa seu tamanho, não pode ter raiz quadrada inteira — pois não existe inteiro que, multiplicado por ele mesmo, dê

um número cujo último algarismo é 3. Fico insatisfeito quando, na divisão, vejo um aluno dizer “vai 1” achando que vai 1 mesmo — e não que, conforme o caso, vai 10, vai 100, vai 1.000.

No ensino fundamental, dou aula para alunos do sexto ano e do sétimo. São anos importantes: o sexto, pela aritmética, e o sétimo, pela álgebra. Então, meu estilo é: reforço os conceitos básicos e ponho a classe para fazer 200 exercícios, a maioria sem contexto. Eu quero que, lá na frente, quando o aluno decifrar aquelas questões enormes do Enem, e finalmente chegar à conta que deve fazer, ele saiba fazer a conta! Não adianta nada decifrar a questão e não saber fazer a conta no final.

Uma vez, vi um vídeo do professor Augusto César Morgado [1944-2006], do Impa, no qual ele dizia que o aluno do ensino médio sabe calcular o determinante de uma matriz, sabe lidar com números complexos, mas não sabe a diferença entre comprar à vista e a prazo. Isso tem a ver com executar algoritmos sem entendê-los. O poder do nosso raciocínio, como o nome diz, está em que seja racional, mas o aluno que meramente segue um algoritmo para calcular o determinante não está raciocinando — está apenas seguindo um algoritmo...

É por isso que passo muita tarefa de casa: para obrigar o aluno a estudar, até porque os pais, se não houver lição de casa, não obrigam seus filhos a estudar. Parece que, se não passei lição de casa, não existe a necessidade de estudar. Apesar disso, prefiro trabalhar tudo o que é importante dentro da sala de aula, e com muitos exercícios, apesar do pouco tempo.

Como avalia o ensino brasileiro, pelo que viu até agora?

Sou um professor novato: me formei em 2011. Mas tenho 36 anos. Quando era mais jovem, fiz quatro semestres de informática na Universidade Federal do Rio de Janeiro, malfeitos, porque era imaturo — mas eu ia bem nas matérias mais matemáticas, como cálculo e álgebra linear. Depois abri uma empresa, uma videolocadora. Depois levei uma paulada do sistema financeiro. Depois comecei a dar aulas particulares de matemática. Um dia, a ficha finalmente caiu: eu tenho jeito para lecionar, e deveria fazer uma licenciatura em matemática!

Essa segunda faculdade foi uma experiência completamente diferente da primeira. Como entrei mais velho, comecei o curso tendo a mais absoluta certeza de que tudo daria certo. Eu participava das aulas, ajudava meus colegas, participava de projetos extracurriculares. Antes mesmo de acabar a faculdade, comecei a dar aulas.

Tenho sentimentos fortes a respeito da ideia de aprovação e de reprovação que existe hoje em dia. Não me parece certo passar o melhor aluno da classe e o pior aluno da classe para o próximo ano, igualando os dois. Essa ideia da aprovação automática implica a ideia de que nós, professores, temos de dar aulas para o aluno que não quer nada com nada: ele não presta atenção na aula, não faz lição de casa. Acho que esse aluno está sendo excluído: na matemática, quem não entende o conteúdo do sexto ano, não tem como entender o conteúdo do sétimo, e assim por diante.

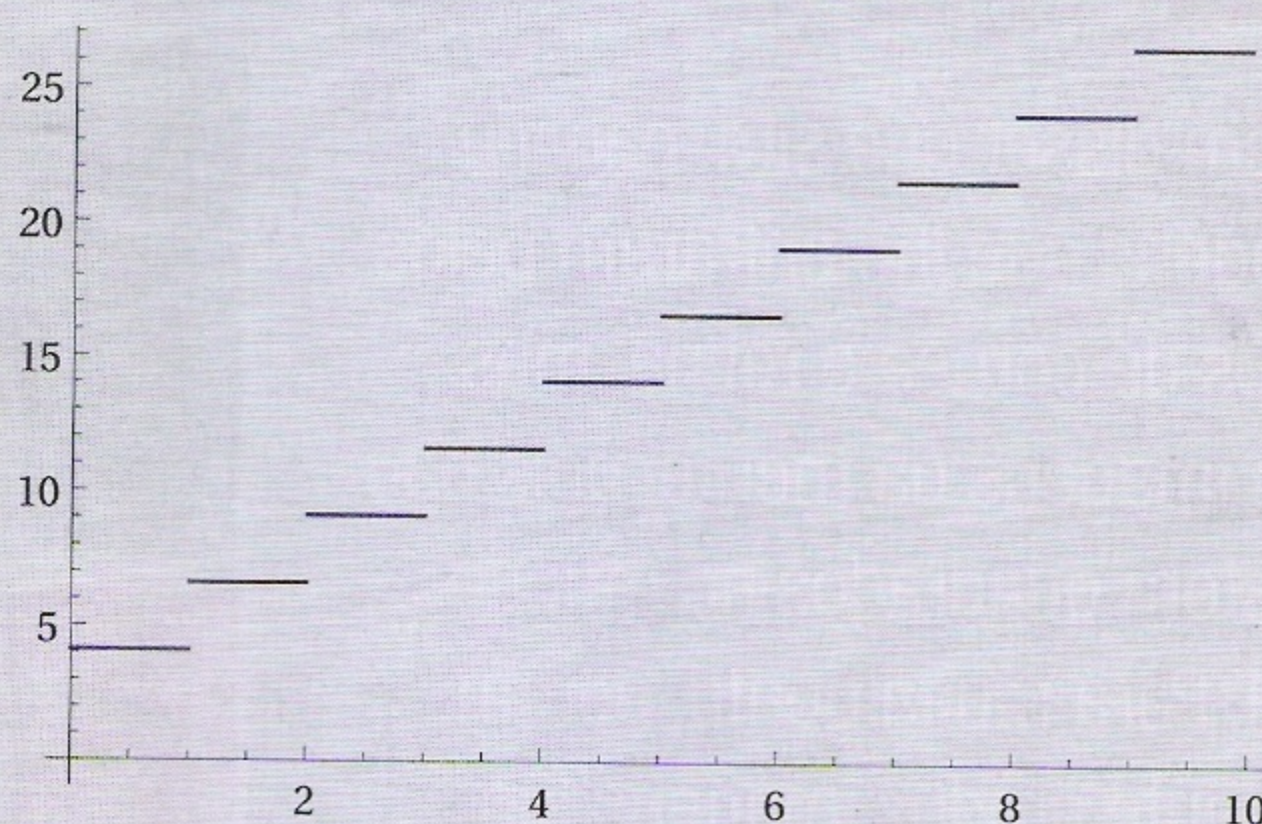
Simpatizo também com uma característica de certas escolas de Portugal: se o aluno sabe a matéria, pede ao professor uma prova, e se vai bem nessa prova, fica dispensado de frequentar o curso. Isso é interessante, porque alguns alunos realmente já sabem o conteúdo. Por que obrigá-los a fazer um curso sobre o que já sabem? Por que entediá-los?

Enfim, na minha escola ideal, não haveria aprovação automática, nem o aluno que sabe a matéria seria obrigado a fazer o curso. Além disso, o currículo seria um pouco menor, de modo que o professor, tendo menos assuntos para ensinar, seria obrigado a ensiná-los bem. Um dia, talvez um professor mais velho me convença de que estou errado, mas, por enquanto, é o que penso.

O PROBLEMA DO TÁXI

A bandeirada custa R\$ 4,10 e o quilômetro rodado, R\$ 2,50. Uma função simples para dar resposta à pergunta “Quanto custará a corrida?” é:

$$y = f(x) = 4,10 + 2,50[x] : x \geq 0$$



Mas o taxista também ganha R\$ 33,00 por hora quando o carro está parado, seja parado no trânsito, seja parado na porta da farmácia enquanto o passageiro compra um analgésico. “No fundo”, diz Cassius, “o problema do táxi é um problema de duas variáveis, ou até mais, conforme o jeito que abordamos o problema.”

Se o passageiro quer uma fórmula mais completa, pode pensar na função $f(x, y)$, dada em reais, na qual x é o número de quilômetros rodados e y é o número de segundos parados por qualquer motivo:

$$f(x, y) = 4,10 + 2,50[x] + \frac{11}{1.200}[y]$$

(Essa fórmula pressupõe um taxímetro capaz de tarifar o tempo parado em segundos.)

Do ponto de vista do taxista: ele deve somar as bandeiradas por dia, o número de quilômetros rodados num dia, os segundos em espera (com passageiro a bordo); deve multiplicar tudo isso por 264 dias úteis, para ter uma ideia de quanto está ganhando num ano. E por fim deve cotejar o ganho anual com as despesas anuais — combustível, manutenção, impostos.